# Towards Higher Observational Type Theory

Ambrus Kaposi

Eötvös Loránd University, Budapest

j.w.w. Thorsten Altenkirch and Mike Shulman

TYPES 2022
Nantes
20 June 2022

# How is $\mathsf{Id}_A : A \to A \to \mathsf{Type}$ defined?

- Ordinary type theory: inductively by

$$\mathsf{refl} : (a : A) \to \mathsf{Id}_A\, a\, a$$

# How is $\mathsf{Id}_A : A \to A \to \mathsf{Type}$ defined?

- Ordinary type theory: inductively by

$$\mathsf{refl} : (a : A) \to \mathsf{Id}_A\, a\, a$$

- Cubical type theory:

$$\mathsf{Id}_A\, a_0\, a_1 := (e : \mathbb{I} \to A) \times (e\,0 = a_0) \times (e\,1 = a_1)$$

# How is $\mathrm{Id}_A : A \to A \to \mathrm{Type}$ defined?

- Ordinary type theory: inductively by

$$\mathrm{refl} : (a : A) \to \mathrm{Id}_A\, a\, a$$

- Cubical type theory:

$$\mathrm{Id}_A\, a_0\, a_1 := (e : \mathbb{I} \to A) \times (e\,0 = a_0) \times (e\,1 = a_1)$$

- Observational type theory:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Id}_{A \times B}\, (a_0, b_0)\, (a_1, b_1) = \mathrm{Id}_A\, a_0\, a_1 \times \mathrm{Id}_B\, b_0\, b_1 \\
&\mathrm{Id}_{A \to B}\, f\ g\ = (x : A) \to \mathrm{Id}_B\, (f\, x)\, (g\, x) \\
&\mathrm{Id}_{\mathrm{Bool}}\ a\ b\ = \mathrm{if}\ a\ \mathrm{then}\, (\mathrm{if}\ b\ \mathrm{then}\ \top\ \mathrm{else}\ \bot)\, \mathrm{else}\, (\mathrm{if}\ b\ \mathrm{then}\ \bot\ \mathrm{else}\ \top) \\
&\mathrm{Id}_{\mathrm{Type}}\ A\, B = (A \simeq B)
\end{aligned}$$

# Observational type theory: a problem

$$\mathsf{Id}_{\Sigma(x:A).B\,x}\,(a_0, b_0)\,(a_1, b_1) =$$

# Observational type theory: a problem

$\mathsf{Id}_{\Sigma(x:A).B\,x}\,(a_0, b_0)\,(a_1, b_1) =$

- $\Sigma\big(e : \mathsf{Id}_A\,a_0\,a_1\big).\mathsf{Id}_{B\,?}\,\underbrace{b_0}_{:B\,a_0}\,\underbrace{b_1}_{:B\,a_1}$

# Observational type theory: a problem

$\mathsf{Id}_{\Sigma(x:A).B\,x}\,(a_0, b_0)\,(a_1, b_1) =$

- $\Sigma\big(e : \mathsf{Id}_A\, a_0\, a_1\big).\mathsf{Id}_{B\,?}\, \underbrace{b_0}_{:B\,a_0}\, \underbrace{b_1}_{:B\,a_1}$
- $\Sigma\big(e : \mathsf{Id}_A\, a_0\, a_1\big).\mathsf{Id}_{B\,a_1}\,(\mathsf{transport}_B\, e\, b_0)\, b_1$

# Observational type theory: a problem

$\mathsf{Id}_{\Sigma(x:A).B\,x}\,(a_0, b_0)\,(a_1, b_1) =$

- $\Sigma\big(e : \mathsf{Id}_A\, a_0\, a_1\big).\mathsf{Id}_{B\,?}\, \underbrace{b_0}_{:B\,a_0}\, \underbrace{b_1}_{:B\,a_1}$
- $\Sigma\big(e : \mathsf{Id}_A\, a_0\, a_1\big).\mathsf{Id}_{B\,a_1}\,(\mathsf{transport}_B\, e\, b_0)\, b_1$
- $\Sigma\big(e : \mathsf{Id}_A\, a_0\, a_1\big).\mathsf{Id}_{B\,a_0}\, b_0\,(\mathsf{transport}_B\, e^{-1}\, b_1)$

# Observational type theory: a problem

$\mathsf{Id}_{\Sigma(x:A).B\,x}\,(a_0, b_0)\,(a_1, b_1) =$

- $\Sigma\big(e : \mathsf{Id}_A\, a_0\, a_1\big).\mathsf{Id}_{B\,?}\, \underbrace{b_0}_{:B\, a_0}\, \underbrace{b_1}_{:B\, a_1}$
- $\Sigma\big(e : \mathsf{Id}_A\, a_0\, a_1\big).\mathsf{Id}_{B\, a_1}\, (\mathsf{transport}_B\, e\, b_0)\, b_1$
- $\Sigma\big(e : \mathsf{Id}_A\, a_0\, a_1\big).\mathsf{Id}_{B\, a_0}\, b_0\, (\mathsf{transport}_B\, e^{-1}\, b_1)$

Instead:

- Altenkirch–McBride–Swierstra 2007: John Major equality

# Observational type theory: a problem

$\mathsf{Id}_{\Sigma(x:A).B\,x}\,(a_0, b_0)\,(a_1, b_1) =$

- $\Sigma\big(e : \mathsf{Id}_A\, a_0\, a_1\big).\mathsf{Id}_{B\,?}\, \underbrace{b_0}_{:B\,a_0}\, \underbrace{b_1}_{:B\,a_1}$
- $\Sigma\big(e : \mathsf{Id}_A\, a_0\, a_1\big).\mathsf{Id}_{B\,a_1}\,(\mathsf{transport}_B\, e\, b_0)\, b_1$
- $\Sigma\big(e : \mathsf{Id}_A\, a_0\, a_1\big).\mathsf{Id}_{B\,a_0}\, b_0\,(\mathsf{transport}_B\, e^{-1}\, b_1)$

Instead:

- Altenkirch–McBride–Swierstra 2007: John Major equality
  - incompatible with univalence

# Observational type theory: a problem

$\mathsf{Id}_{\Sigma(x:A).B\,x}\,(a_0, b_0)\,(a_1, b_1) =$

- $\Sigma\big(e : \mathsf{Id}_A\, a_0\, a_1\big).\mathsf{Id}_{B\,?}\, \underbrace{b_0}_{:B\,a_0}\, \underbrace{b_1}_{:B\,a_1}$
- $\Sigma\big(e : \mathsf{Id}_A\, a_0\, a_1\big).\mathsf{Id}_{B\,a_1}\, (\mathsf{transport}_B\, e\, b_0)\, b_1$
- $\Sigma\big(e : \mathsf{Id}_A\, a_0\, a_1\big).\mathsf{Id}_{B\,a_0}\, b_0\, (\mathsf{transport}_B\, e^{-1}\, b_1)$

Instead:

- Altenkirch–McBride–Swierstra 2007: John Major equality
  - incompatible with univalence
- Bernardy–Jansson–Paterson 2010: parametricity relation

# Observational type theory: a problem

$\mathsf{Id}_{\Sigma(x:A).B\,x}\,(a_0, b_0)\,(a_1, b_1) =$

- $\Sigma\big(e : \mathsf{Id}_A\, a_0\, a_1\big).\mathsf{Id}_{B\,?}\, \underbrace{b_0}_{:B\,a_0}\, \underbrace{b_1}_{:B\,a_1}$
- $\Sigma\big(e : \mathsf{Id}_A\, a_0\, a_1\big).\mathsf{Id}_{B\,a_1}\,(\mathsf{transport}_B\, e\, b_0)\, b_1$
- $\Sigma\big(e : \mathsf{Id}_A\, a_0\, a_1\big).\mathsf{Id}_{B\,a_0}\, b_0\,(\mathsf{transport}_B\, e^{-1}\, b_1)$

Instead:

- Altenkirch–McBride–Swierstra 2007: John Major equality
  - incompatible with univalence
- Bernardy–Jansson–Paterson 2010: parametricity relation
  - a model construction / syntactic translation

# Parametricity

$$\frac{\Gamma : \mathsf{Con}}{\Gamma^{\mathsf{R}} : \mathsf{Ty}\,(\Gamma, \Gamma)} \qquad \frac{A : \mathsf{Ty}\,\Gamma}{A^{\mathsf{R}} : \mathsf{Ty}\,(\gamma_0 : \Gamma, \gamma_1 : \Gamma, \Gamma^{\mathsf{R}}, A[\gamma_0], A[\gamma_1])}$$

$$\frac{a : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,A}{a^{\mathsf{R}} : \mathsf{Tm}\,(\gamma_0 : \Gamma, \gamma_1 : \Gamma, \Gamma^{\mathsf{R}})\,\big(A^{\mathsf{R}}\big[a[\gamma_0], a[\gamma_1]\big]\big)}$$

$$(\Gamma, A)^{\mathsf{R}}[(\gamma_0, a_0), (\gamma_1, a_1)] = \Sigma(\gamma_2 : \Gamma^{\mathsf{R}}[\gamma_0, \gamma_1]).A^{\mathsf{R}}[\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, a_0, a_1]$$

# Parametricity

$$\frac{\Gamma : \mathsf{Con}}{\Gamma^{\mathsf{R}} : \mathsf{Ty}\,(\Gamma, \Gamma)} \qquad \frac{A : \mathsf{Ty}\,\Gamma}{A^{\mathsf{R}} : \mathsf{Ty}\,(\gamma_0 : \Gamma, \gamma_1 : \Gamma, \Gamma^{\mathsf{R}}, A[\gamma_0], A[\gamma_1])}$$

$$\frac{a : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,A}{a^{\mathsf{R}} : \mathsf{Tm}\,(\gamma_0 : \Gamma, \gamma_1 : \Gamma, \Gamma^{\mathsf{R}})\,\big(A^{\mathsf{R}}\big[a[\gamma_0], a[\gamma_1]\big]\big)}$$

$$(\Gamma, A)^{\mathsf{R}}[(\gamma_0, a_0), (\gamma_1, a_1)] = \Sigma(\gamma_2 : \Gamma^{\mathsf{R}}[\gamma_0, \gamma_1]).A^{\mathsf{R}}[\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, a_0, a_1]$$

- This only gives external parametricity e.g. for $\Pi(A : \mathsf{Type}).A \to A$.

# Parametricity

$$\frac{\Gamma : \mathsf{Con}}{\Gamma^{\mathsf{R}} : \mathsf{Ty}\,(\Gamma, \Gamma)} \qquad \frac{A : \mathsf{Ty}\,\Gamma}{A^{\mathsf{R}} : \mathsf{Ty}\,(\gamma_0 : \Gamma, \gamma_1 : \Gamma, \Gamma^{\mathsf{R}}, A[\gamma_0], A[\gamma_1])}$$

$$\frac{a : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,A}{a^{\mathsf{R}} : \mathsf{Tm}\,(\gamma_0 : \Gamma, \gamma_1 : \Gamma, \Gamma^{\mathsf{R}})\,\big(A^{\mathsf{R}}\big[a[\gamma_0], a[\gamma_1]\big]\big)}$$

$$(\Gamma, A)^{\mathsf{R}}[(\gamma_0, a_0), (\gamma_1, a_1)] = \Sigma(\gamma_2 : \Gamma^{\mathsf{R}}[\gamma_0, \gamma_1]).A^{\mathsf{R}}[\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, a_0, a_1]$$

- This only gives external parametricity e.g. for $\Pi(A : \mathsf{Type}).A \to A$.
- We tried to add new operations $\mathsf{refl}_\Gamma : \mathsf{Tm}\,(\gamma : \Gamma)\,(\Gamma^{\mathsf{R}}[\gamma, \gamma])$ but ended up in permutation hell (TYPES 2015 in Tallinn).

# Parametricity

$$\frac{\Gamma : \mathsf{Con}}{\Gamma^{\mathsf{R}} : \mathsf{Ty}\,(\Gamma, \Gamma)} \qquad \frac{A : \mathsf{Ty}\,\Gamma}{A^{\mathsf{R}} : \mathsf{Ty}\,(\gamma_0 : \Gamma, \gamma_1 : \Gamma, \Gamma^{\mathsf{R}}, A[\gamma_0], A[\gamma_1])}$$

$$\frac{a : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,A}{a^{\mathsf{R}} : \mathsf{Tm}\,(\gamma_0 : \Gamma, \gamma_1 : \Gamma, \Gamma^{\mathsf{R}})\,\big(A^{\mathsf{R}}\big[a[\gamma_0], a[\gamma_1]\big]\big)}$$

$$(\Gamma, A)^{\mathsf{R}}[(\gamma_0, a_0), (\gamma_1, a_1)] = \Sigma(\gamma_2 : \Gamma^{\mathsf{R}}[\gamma_0, \gamma_1]).A^{\mathsf{R}}[\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, a_0, a_1]$$

- The external parametricity translation can *specify* internal parametricity!

# Parametricity

$$\frac{\Gamma : \mathsf{Con}}{\Gamma^{\mathsf{R}} : \mathsf{Ty}\,(\Gamma, \Gamma)} \qquad \frac{A : \mathsf{Ty}\,\Gamma}{A^{\mathsf{R}} : \mathsf{Ty}\,(\gamma_0 : \Gamma, \gamma_1 : \Gamma, \Gamma^{\mathsf{R}}, A[\gamma_0], A[\gamma_1])}$$

$$\frac{a : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,A}{a^{\mathsf{R}} : \mathsf{Tm}\,(\gamma_0 : \Gamma, \gamma_1 : \Gamma, \Gamma^{\mathsf{R}})\,\big(A^{\mathsf{R}}\big[a[\gamma_0], a[\gamma_1]\big]\big)}$$

$$(\Gamma, A)^{\mathsf{R}}[(\gamma_0, a_0), (\gamma_1, a_1)] = \Sigma(\gamma_2 : \Gamma^{\mathsf{R}}[\gamma_0, \gamma_1]).A^{\mathsf{R}}[\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, a_0, a_1]$$

- The external parametricity translation can *specify* internal parametricity!
- We just need to change from an external viewpoint to an internal.

# Internal standard model

In the presheaf model over the syntax of type theory, we have

$$\begin{aligned}
\mathsf{Ty}^\circ &: \mathsf{Set} \\
\mathsf{Tm}^\circ &: \mathsf{Ty}^\circ \to \mathsf{Set} \\
\Sigma^\circ &: (A : \mathsf{Ty}^\circ) \to (\mathsf{Tm}^\circ\, A \to \mathsf{Ty}^\circ) \to \mathsf{Ty}^\circ
\end{aligned}$$

# Internal standard model

In the presheaf model over the syntax of type theory, we have

$$\begin{aligned}\mathsf{Ty}^\circ &: \mathsf{Set}\\ \mathsf{Tm}^\circ &: \mathsf{Ty}^\circ \to \mathsf{Set}\\ \Sigma^\circ &: (A : \mathsf{Ty}^\circ) \to (\mathsf{Tm}^\circ\, A \to \mathsf{Ty}^\circ) \to \mathsf{Ty}^\circ\end{aligned}$$

We define the standard model of type theory internally to presheaves over the syntax.

$$\begin{aligned}\mathsf{Con} &:= \mathsf{Ty}^\circ\\ \mathsf{Ty}\,\Gamma &:= \mathsf{Tm}^\circ\,\Gamma \to \mathsf{Ty}^\circ\\ \mathsf{Tm}\,\Gamma\,A &:= (\gamma : \mathsf{Tm}^\circ\,\Gamma) \to \mathsf{Tm}^\circ\,(A\,\gamma)\\ (\Gamma, A) &:= \Sigma^\circ\,\Gamma\,A\end{aligned}$$

# Internal parametricity

$$\frac{\Gamma : \mathsf{Con}}{\Gamma^{\mathsf{R}} : \mathsf{Ty}\,(\Gamma, \Gamma)}$$

$$\frac{A : \mathsf{Ty}\,\Gamma}{A^{\mathsf{R}} : \mathsf{Ty}\,(\gamma_0 : \Gamma, \gamma_1 : \Gamma, \Gamma^{\mathsf{R}}, A[\gamma_0], A[\gamma_1])}$$

$$\frac{a : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,A}{a^{\mathsf{R}} : \mathsf{Tm}\,(\gamma_0 : \Gamma, \gamma_1 : \Gamma, \Gamma^{\mathsf{R}})\,\big(A^{\mathsf{R}}\big[a[\gamma_0], a[\gamma_1]\big]\big)}$$

$$(\Gamma, A)^{\mathsf{R}}[(\gamma_0, a_0), (\gamma_1, a_1)] = \Sigma(\gamma_2 : \Gamma^{\mathsf{R}}[\gamma_0, \gamma_1]).A^{\mathsf{R}}[\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, a_0, a_1]$$

# Internal parametricity

$$\frac{\Gamma : \mathsf{Ty}^\circ}{\Gamma^{\mathsf{R}} : \mathsf{Tm}^\circ\,\Gamma \to \mathsf{Tm}^\circ\,\Gamma \to \mathsf{Ty}^\circ}$$

$$\frac{A : \mathsf{Tm}^\circ\,\Gamma \to \mathsf{Ty}^\circ}{A^{\mathsf{R}} : \mathsf{Tm}^\circ\,(\Gamma^{\mathsf{R}}\,\gamma_0\,\gamma_1) \to \mathsf{Tm}^\circ\,(A\,\gamma_0) \to \mathsf{Tm}^\circ\,(A\,\gamma_1) \to \mathsf{Ty}^\circ}$$

$$\frac{a : (\gamma : \mathsf{Tm}^\circ\,\Gamma) \to \mathsf{Tm}^\circ\,(A\,\gamma)}{a^{\mathsf{R}} : (\gamma_2 : \mathsf{Tm}^\circ\,(\Gamma^{\mathsf{R}}\,\gamma_0\,\gamma_1)) \to \mathsf{Tm}^\circ\,(A^{\mathsf{R}}\,\gamma_2\,(a\,\gamma_0)\,(a\,\gamma_1))}$$

$$(\Sigma^\circ\,\Gamma\,A)^{\mathsf{R}}\,(\gamma_0, a_0)\,(\gamma_1, a_1) = \Sigma^\circ\,(\gamma_2 : \Gamma^{\mathsf{R}}\,\gamma_0\,\gamma_1).\,A^{\mathsf{R}}\,\gamma_2\,a_0\,a_1$$

# Internal parametricity

$$\frac{\Gamma : \mathsf{Ty}^\circ}{\mathsf{Id}_\Gamma : \mathsf{Tm}^\circ\,\Gamma \to \mathsf{Tm}^\circ\,\Gamma \to \mathsf{Ty}^\circ}$$

$$\frac{A : \mathsf{Tm}^\circ\,\Gamma \to \mathsf{Ty}^\circ}{\mathsf{Idd}_A : \mathsf{Tm}^\circ\,(\mathsf{Id}_\Gamma\,\gamma_0\,\gamma_1) \to \mathsf{Tm}^\circ\,(A\,\gamma_0) \to \mathsf{Tm}^\circ\,(A\,\gamma_1) \to \mathsf{Ty}^\circ}$$

$$\frac{a : (\gamma : \mathsf{Tm}^\circ\,\Gamma) \to \mathsf{Tm}^\circ\,(A\,\gamma)}{\mathsf{apd}\,a : (\gamma_2 : \mathsf{Tm}^\circ\,(\mathsf{Id}_\Gamma\,\gamma_0\,\gamma_1)) \to \mathsf{Tm}^\circ\,(\mathsf{Idd}_A\,\gamma_2\,(a\,\gamma_0)\,(a\,\gamma_1))}$$

$$\mathsf{Id}_{\Sigma^\circ\,\Gamma\,A}\,(\gamma_0, a_0)\,(\gamma_1, a_1) = \Sigma^\circ\,(\gamma_2 : \mathsf{Id}_\Gamma\,\gamma_0\,\gamma_1).\,\mathsf{Idd}_A\,\gamma_2\,a_0\,a_1$$

# Internal parametricity

$$\frac{\Gamma : \mathsf{Ty}^\circ}{\mathsf{Id}_\Gamma : \mathsf{Tm}^\circ\,\Gamma \to \mathsf{Tm}^\circ\,\Gamma \to \mathsf{Ty}^\circ}$$

$$\frac{A : \mathsf{Tm}^\circ\,\Gamma \to \mathsf{Ty}^\circ}{\mathsf{Idd}_A : \mathsf{Tm}^\circ\,(\mathsf{Id}_\Gamma\,\gamma_0\,\gamma_1) \to \mathsf{Tm}^\circ\,(A\,\gamma_0) \to \mathsf{Tm}^\circ\,(A\,\gamma_1) \to \mathsf{Ty}^\circ}$$

$$\frac{a : (\gamma : \mathsf{Tm}^\circ\,\Gamma) \to \mathsf{Tm}^\circ\,(A\,\gamma)}{\mathsf{apd}\,a : (\gamma_2 : \mathsf{Tm}^\circ\,(\mathsf{Id}_\Gamma\,\gamma_0\,\gamma_1)) \to \mathsf{Tm}^\circ\,(\mathsf{Idd}_A\,\gamma_2\,(a\,\gamma_0)\,(a\,\gamma_1))}$$

$$\mathsf{Id}_{\Sigma^\circ\,\Gamma\,A}\,(\gamma_0, a_0)\,(\gamma_1, a_1) = \Sigma^\circ\,(\gamma_2 : \mathsf{Id}_\Gamma\,\gamma_0\,\gamma_1).\,\mathsf{Idd}_A\,\gamma_2\,a_0\,a_1$$
$$\mathsf{Id}_\top\,\mathsf{tt}\,\mathsf{tt} = \top$$

$$\frac{a : \mathsf{Tm}^\circ\,A}{\mathsf{refl}\,a := \mathsf{apd}\,(\lambda\_.a)\,\mathsf{tt} : \mathsf{Tm}^\circ\,(\mathsf{Idd}_{\lambda\_.A}\,\mathsf{tt}\,a\,a)}$$

# Summary

- The syntax for internal parametricity is the internal Bernardy logical relation interpretation.
  - Internal to presheaves over the syntax a.k.a. two level type theory, HOAS, logical framework.
  - Logical relation over the internal standard model.
- Work in progress!
- To get H.O.T.T., we need: transport, symmetries.
  - See Mike's talks at the CMU HoTT seminar (click!)
- Compared to cubical type theory, cubical internal parametricity:
  - To specify the syntax, we don't need an interval or talk about dimensions
  - Stricter, e.g. univalence computes better